

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Седова Н.О.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»**

для студентов специалитета по специальностям
10.05.01 Компьютерная безопасность,
10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем
очной формы обучения

Ульяновск, 2021

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» / составитель: Седова Н.О. - Ульяновск: УлГУ, 2021.

Настоящие методические указания предназначены для студентов, изучающих дисциплину «Математическая логика и теория алгоритмов». В работе приведены список рекомендуемой литературы для изучения, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля, задачи, кейсы и тестовые задания для самостоятельной работы.

Студентам следует использовать данные методические указания при подготовке к практическим занятиям, к зачёту и к экзамену по дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол № 2/21 от 16 марта 2021 г.)

Оглавление

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	4
2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	5
ТЕМА 2. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.....	5
ТЕМА 3. ВИДЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ. ЛОГИЧЕСКАЯ РАВНОСИЛЬНОСТЬ.	6
ТЕМА 4. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. СВОЙСТВА. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ...7	
ТЕМА 5. МАКСИМАЛЬНОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ.....	8
ТЕМА 6. СВОЙСТВА ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ.....	9
ТЕМА 7. ПОНЯТИЕ ПРЕДИКАТА. ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ.	10
ТЕМА 8. ПРЕДИКАТЫ. ФОРМАЛИЗАЦИЯ СВОЙСТВ И ОТНОШЕНИЙ. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ.	11
ТЕМА 9. ИСТИННОСТЬ И ЛОЖНОСТЬ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ПРЕДИКАТОВ.	11
ТЕМА 10. СТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ. ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ. СИЛЛОГИЗМЫ АРИСТОТЕЛЯ.	12
ТЕМА 11. ПОНЯТИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ИНТЕРПРЕТАЦИИ И МОДЕЛИ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ.....	13
ТЕМА 12. СВОЙСТВА АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ.....	13
ТЕМА 13. МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.....	14
ТЕМА 14. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ.....	14
ТЕМА 15. МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ.	15
ТЕМА 16. ВЕРИФИКАЦИЯ. ПРОГРАММА КАК ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ПРЕДИКАТОВ.....	15
ТЕМА 17. СПЕЦИФИКАЦИЯ ПРОГРАММ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.....	16
ТЕМА 18. ПРИМЕРЫ ПРОВЕРКИ КОРРЕКТНОСТИ ПРОГРАММ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.	16
ТЕМА 19. МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕАГИРУЮЩИХ СИСТЕМ.....	17
ТЕМА 20. ЛИНЕЙНАЯ ТЕМПОРАЛЬНАЯ ЛОГИКА.....	17
ТЕМА 21. ТЕМПОРАЛЬНАЯ ЛОГИКА ВЕТВЯЩЕГОСЯ ВРЕМЕНИ	18
ТЕМА 22. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЕДУКТИВНОЙ ВЕРИФИКАЦИИ ПРОГРАММ	18
ТЕМА 23. АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИМЫЕ ФУНКЦИИ	19
ТЕМА 24. АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ.....	20

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Скорубский, В. И. Математическая логика: учебник и практикум для бакалавриата и специалитета / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 211 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-01114-2. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/433712>
2. Михеева Е.А. Дискретная математика: конспект лекций (второй семестр) [Электронный ресурс]: электронный учебный курс: учеб. пособие / Михеева Елизавета Алексеевна; УлГУ. - Электрон. текстовые дан. - Ульяновск: УлГУ, 2016 URL: <http://edu.ulsu.ru/courses/736/interface/>
3. Математическая логика и теория алгоритмов: методические указания к самостоятельной работе / составители И. А. Седых. — Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2014. — 25 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/55106.html>
4. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов по спец. 090100 – «Информационная безопасность» / М. М. Глухов [и др.]. - СПб.: Лань, 2008. - 112 с.: ил.
5. Карпов Ю. Г. Model Checking. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб: БХВ-Петербург, 2010. — URL: <https://b-ok.cc/book/2438810/a62326>
6. Википедия. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_software_bugs
7. Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов: учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 255 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00767-1. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <http://www.biblio-online.ru/bcode/432018>.
8. Ю.Г. Карпов. Задачи по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов». Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт Компьютерных наук и информационных технологий, 2016 г. — URL: <https://docplayer.ru/40914535-Zadachi-po-kursu-matematicheskaya-logika-i-teoriya-algoritmov.html>
9. Зюзьков, В. М. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие / В. М. Зюзьков. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2015. — 236 с. — ISBN 978-5-4332-0197-2. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72122.html>
10. Кулькова, Л. И. Сборник задач и упражнений по теории алгоритмов: учебно-методическое пособие / Л. И. Кулькова, С. И. Салпагаров. — Москва: Российский университет дружбы народов, 2017. — 48 с. — ISBN 978-5-209-08067-1. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/91068.html>

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

С темой 1 «ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ» студенты знакомятся во время лекционных занятий.

ТЕМА 2. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.

Основные вопросы темы:

1. Высказывания. Логические связки. Формулы логики высказываний.
2. Интерпретация. Формальный язык.

Рекомендации по изучению темы:

В учебнике [1] на с.18-25 изложен вопрос 1, на с.25-27 – вопрос 2. Некоторые аспекты вопроса 2 изложены также в [4], с.4-7. Для закрепления практических навыков рекомендуются задачи 1.1-1.7 из [1], с.44-45, задачи 2.1.1-2.1.5 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Что такое высказывание?
2. Дайте определение логических связок И, ИЛИ, НЕ
3. Как трактуется необходимость и достаточность импликации?
4. Дайте определение правильно построенной формулы
5. Что такое SAT-проблема?
6. Как математическая логика решает проблемы анализа высказываний?
7. Что такое “язык логики высказываний”?
8. Какова последовательность шагов при решении проблем в рамках математической логики?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Какое из следующих предложений не является высказыванием?

- а) это утверждение ложно;
- б) вчера был дождь;
- в) Земля – планета Солнечной системы;
- г) $5-3=4$

2. Укажите высказывание, имеющее тот же смысл, что и высказывание ЕСЛИ X ТО Y :

- а) НЕ X ИЛИ Y
- б) X ИЛИ Y
- в) X ИЛИ НЕ Y

3. Имеются высказывания, обозначенные буквами A , B и C .

Предположим, что A и C обозначают истинные высказывания, B обозначает ложное высказывание. Тогда истинными являются высказывания:

- а) $\neg(A \wedge (B \wedge \neg(A \wedge C)))$
- б) $\neg(C \rightarrow (A \rightarrow B))$
- в) $\neg(C \vee A) \vee B$
- г) $(C \leftrightarrow A) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

4. Укажите пару множеств, в которой первое множество формул логики высказываний не совпадает со вторым множеством этой пары:

- а) Множество тавтологий, множество опровержимых формул
- б) Множество невыполнимых формул, множество противоречий
- в) Множество логически общезначимых формул, множество тавтологий

5. Какая формула логики высказываний соответствует следующему высказыванию естественного языка: «Если сегодня понедельник, то студенты и пенсионеры проходят в музей бесплатно»

- а) $A \wedge (B \vee C) \rightarrow D$
- б) $A \rightarrow (B \wedge C)$
- в) $C \rightarrow (A \rightarrow B)$
- $(C \wedge A) \rightarrow B$

6. Какая формула логики высказываний адекватно отражает смысл следующего высказывания естественного языка: «Вот сдадите все домашние задания, напишете все контрольные работы – и получите зачет автоматом»

- а) $(C \wedge A) \rightarrow B$
- б) $A \rightarrow (B \wedge C)$
- в) $A \wedge (B \vee C) \rightarrow D$
- $C \rightarrow (A \rightarrow B)$

7. Какое высказывание естественного языка соответствует следующей логической формуле $(B \wedge C) \rightarrow A$?

- а) Мы успеем сделать все уроки и погулять, только если будем организованными.
- б) Если завтра будет хорошая погода, то мы не будем делать уроки, а пойдем гулять.
- в) Дети и пенсионеры обслуживаются вне очереди
- г) Если студент выполнит все задания, то он получит зачет автоматом

ТЕМА 3. ВИДЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ. ЛОГИЧЕСКАЯ РАВНОСИЛЬНОСТЬ.

Основные вопросы темы:

1. Тавтологии и их значение. Невыполнимые формулы. Проблема SAT.
2. Равносильность формул.

Рекомендации по изучению темы:

Теоретические основы рассматриваемых вопросов изложены в учебнике [1] на с.25-26, 31-35. В учебнике [1] также можно ознакомиться с основными сведениями по вопросу 2 (с.31-32). Для закрепления практических навыков рекомендуются задачи 2.1.6-2.1.17 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Какие формулы называются выполнимыми, опровержимыми, тавтологиями, противоречиями?
2. Что такое SAT-проблема?
3. Как устанавливается равносильность логических формул?
4. Как математическая логика решает проблемы анализа высказываний?
5. Какова последовательность шагов при решении проблем в рамках математической логики?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Укажите пару множеств, в которой первое множество формул логики высказываний не совпадает со вторым множеством этой пары:

- а) Множество тавтологий, множество опровержимых формул
- б) Множество невыполнимых формул, множество противоречий
- в) Множество логически общезначимых формул, множество тавтологий

2. Какие из следующих утверждений равносильны:

- А: Формула Φ логики высказываний противоречива.
- В: Формула Φ логики высказываний не является выполнимой.
- С: Формула $\neg\Phi$ логики высказываний является выполнимой.

- а) А и В
- б) А и С
- в) В и С
- г) все три

3. Определите, к какому типу принадлежит формула $A \wedge (B \vee C) \rightarrow D$

- а) выполнимая
- б) опровержимая
- в) тавтология
- г) противоречие

ТЕМА 4. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. СВОЙСТВА. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Основные вопросы темы:

Свойства нормальных форм. Использование в логике высказываний.

Рекомендации по изучению темы:

Теория по теме представлена в [1] на с.35-37. Задачи по теме см., например, в [2] (задачи для самостоятельной работы к разделу 6, с. 1-25), в [3] (Задание 1 с.6), в [8] (задачи 1.4.8-1.4.13).

Контрольные вопросы:

- 1. Как построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и совершенную конъюнктивную нормальную форму логической формулы по таблице истинности?
- 2. Как построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и совершенную конъюнктивную нормальную форму логической формулы с помощью преобразований логической формулы?
- 3. Как перейти от сокращенной нормальной формы к совершенной и обратно?
- 4. Какие выводы об истинности логической формулы можно сделать по ее нормальной форме?

Тесты для самостоятельной работы:

- 1. Какая логическая формула не может быть представлена в виде СДНФ?
 - а) невыполнимая
 - б) общезначимая
 - в) выполнимая
 - г) все логические формулы могут быть представлены в виде СДНФ

2. Какая логическая формула не может быть представлена в виде СКНФ?

- а) общезначимая
- б) невыполнимая
- в) выполнимая
- г) все логические формулы могут быть представлены в виде СКНФ

3. Дана двоичная функция 00011110. Какого дизъюнкта нет в ее СКНФ?

- а) $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
- б) $x_1 \vee x_2 \vee x_3$
- в) $x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$
- г) $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$

ТЕМА 5. МАКСИМАЛЬНОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ.

Основные вопросы темы:

Максимальное логическое следствие. Использование нормальных форм в проблеме логического следования.

Рекомендации по изучению темы:

Теория по вопросам темы представлена в учебнике [1] (с.35-37, 49-50). Задачи по теме см., в [8] (задачи 2.1.18-2.1.25, 2.2.1-2.2.12, 2.4.1-2.4.40).

Контрольные вопросы:

1. В чем смысл логического следствия из установленных фактов?
2. Что означает максимальное логическое следствие? Как его построить?
3. Как решать логические задачи, используя абстрагирование и формализацию? Что следует считать фактами в такой задаче?
4. Как формализовать и учитывать утверждения, истинность которых неизвестна?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Известно, что рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжёт. Какое из следующих высказываний мог сказать житель острова рыцарей и лжецов?

- а) Если я лжец, то я рыцарь
- б) Если я рыцарь, то я лжец

2. Перед нами три островитянина 1, 2 и 3. Двое из них высказывают следующие утверждения: 1 сказал: «Мы все лжецы»; 2 сказал: «ровно один из нас рыцарь». Известно, что рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Кто из них рыцарь, а кто лжец?

- а) 1 — рыцарь
- б) 1 — лжец
- в) 2 — рыцарь
- г) 2 — лжец
- д) 3 — рыцарь
- е) 3 — лжец

ТЕМА 6. СВОЙСТВА ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ.

Основные вопросы темы:

Определение логического следствия и его использование. Способы проверки правильности рассуждения на основе определения логического следования.

Рекомендации по изучению темы:

Необходимая теория по вопросам темы представлена в учебниках [1] (с.55-56), [9] (с.101-103). Для самостоятельного закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи из [1] (с.59-60), а также задачи 2.4.49-2.4.55 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Что такое “правильные” схемы умозаключений?
2. Как можно проверить “правильность” схемы умозаключения?
3. Как проверить, что утверждение R является логическим следствием утверждений F_1, \dots, F_n ?
4. Почему аналитические методы проверки логического следствия сложны?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Даны логические функции: $f_1 = x \wedge y$, $f_2 = \neg(x \leftrightarrow y)$, $f_3 = x \rightarrow y$, $f_4 = \neg x$, $f_5 = 1$.
Какие из следующих утверждений являются верными?

- а) f_3 является логическим следствием f_1
- б) f_5 является логическим следствием всех других
- в) все функции являются логическими следствиями f_5
- г) f_4 является логическим следствием f_3

2. Даны посылки: $A \rightarrow (B \wedge C)$, $B \rightarrow (A \rightarrow C)$, $(C \wedge A) \rightarrow B$. Какие из следующих формул являются логическими следствиями этих посылок?

- а) $A \wedge (B \vee C) \rightarrow A$
- б) $A \rightarrow C$
- в) $B \wedge C$
- г) $B \vee C$

3. Противоречивость какой формулы логики высказываний является критерием того, что формула Ψ является логическим следствием совокупности формул Φ_1, \dots, Φ_k :

- а) $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_k \wedge \neg \Psi$
- б) $\neg \Phi_1 \wedge \dots \wedge \neg \Phi_k \wedge \Psi$
- в) $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_k \rightarrow \Psi$

4. Пусть справедлива теорема:

Для того чтобы хроничные сепульки были латентными, достаточно, чтобы они были контрарными.

Какие из следующих утверждений являются следствиями этой теоремы?

- 1) Только латентные сепульки контрарны;
- 2) Все латентные сепульки контрарны;
- 3) Для того, чтобы хроничные сепульки были контрарными, необходимо, чтобы они были

нелатентными;

4) *Сеулька не обладает свойством контрарности, если и только если она не является латентной.*

- а) 1) и 4)
- б) только 1)
- в) только 2)
- г) 2) и 3)
- д) 3) и 4)

5. Задача об опоздавшем автобусе. Даны следующие посылки:

F1. Если Билл поедет на автобусе, то он потеряет свое место, если автобус опоздает.

F2. Билл не сможет вернуться домой, если он потеряет свое место и будет чувствовать себя подавленным.

F3. Если Билл не получит работу, то он будет чувствовать себя подавленным и не сможет вернуться домой.

Какие из следующих предложений верны, если верны указанные выше посылки?

- а) Билл получит работу, если он сможет вернуться домой.
- б) Если Билл не потеряет своего места, то он не сможет вернуться домой и не получит работы.
- в) Билл будет чувствовать себя подавленным, если автобус опоздает, или он потеряет свое место.

ТЕМА 7. ПОНЯТИЕ ПРЕДИКАТА. ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ.

Основные вопросы темы:

Основные определения логики предикатов. Классификация предикатов. Понятие квантора. Кванторы общности и существования, их использование.

Рекомендации по изучению темы:

Основная теория по рассматриваемым вопросам представлена в учебниках [1] (с.62-65), в [2] (раздел «Предикаты»). Задачи, контрольные вопросы и задания по теме предлагаются в [1] на с.76, в [3] (Задание 6 на с.17), в [2] (задачи для самостоятельной работы к разделу 6, с. 26-46).

Контрольные вопросы:

1. Что такое предикат?
2. Чем удобны предикаты? В чем их отличие от высказываний?
3. Как строятся предикатные формулы?
4. Что означают квантор существования и квантор всеобщности?
5. Что такое связанные и свободные переменные в предикатной формуле?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Укажите, какое правило построения формулы в общем случае не изменяет множества связанных и свободных переменных:

- а) Навешивание отрицания на формулу
- б) Навешивание квантора существования на переменную формулы
- в) Подстановка константы вместо переменной
- г) Навешивание квантора общности на переменную формулы

2. Пусть на множестве $A \neq \emptyset$ определен предикат $P(x)$.
Выражение $\neg(\forall x)P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда:
- $P(x)$ является тождественно истинным предикатом.
 - $P(x)$ имеет хотя бы одно ложное значение на множестве A .
 - $P(x)$ является тождественно ложным предикатом.
 - $P(x)$ имеет хотя бы одно истинное значение на множестве A .

ТЕМА 8. ПРЕДИКАТЫ. ФОРМАЛИЗАЦИЯ СВОЙСТВ И ОТНОШЕНИЙ. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ.

Основные вопросы темы:

Местность предикатов. Формальная запись свойств, отношений, утверждений с помощью предикатов. Открытые и замкнутые предикатные формулы. Логические операции в предикатных формулах.

Рекомендации по изучению темы:

Теоретические сведения и примеры по вопросам темы представлены в учебном пособии [5] (с.32-40), в учебнике [1] (с.71-73), [8] (с.113-116,124-129), см. также [7], с.56-61. Задания по теме предлагаются в [7] на с.90-92, в [8] (задачи 2.6.2-2.6.8, 2.6.12-2.6.17), в [9] (с.129).

Контрольные вопросы:

1. Что такое одноместный предикат?
2. Перечислите логические операции с предикатами.
3. Что означает замкнутая формула?
4. Приведите примеры утверждений с одноместными предикатами.
5. Приведите примеры интерпретации одноместных предикатов на множествах.
6. Какие предикаты считаются многоместными?

ТЕМА 9. ИСТИННОСТЬ И ЛОЖНОСТЬ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ПРЕДИКАТОВ.

Основные вопросы темы:

Истинность. Интерпретация. Множество истинности. Модель. Тавтологии. Проблемы разрешения для общезначимости и выполнимости предикатных формул. Ограниченные кванторы и их свойства.

Рекомендации по изучению темы:

Теоретические сведения и примеры по теме представлены в учебниках [1] (с.65-69), [9] (с.117-123), см. также [7], с.61-63. Для закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи 4.1-4.9 из [1] (с.88-89), 2.6.18-2.6.48 из [8], задачи на с.93-94 из [9].

Контрольные вопросы:

1. Что такое интерпретация предикатной формулы?
2. Что такое модель? Контрмодель? Приведите примеры.

3. Как определяется множество истинности предиката? Что для этого должно быть определено?
4. Как определяются множества истинности сложных предикатов? Когда два предиката называются логически эквивалентными?
5. Что такое “выполнимость” предикатной формулы?
6. Почему проверка выполнимости предикатной формулы сложна?
7. Что такое ограниченный квантор?
8. Отличаются ли операции над ограниченными кванторами от операций над обычными кванторами?
9. Чем удобны ограниченные кванторы?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Укажите пару равносильных предикатов на множестве натуральных чисел:

- а) $(x \leq y), \neg(x > y)$
- б) $(x \leq y) \wedge (y \leq x), (x \leq y)$
- в) $(x \leq y), (y \leq x)$

2. Укажите, какая формула является истинной на множестве $Z \times Z$:

- а) $(\forall x_1)(\exists x_2)((x_1 + x_2) < (x_1 - x_2))$
- б) $(\exists x_1)(\forall x_2)((x_1 + x_2) = (x_1 - x_2))$
- в) $(\exists x_1)(\forall x_2)((x_1 + x_2) < (x_1 - x_2))$

3. Какие пары следующих высказываний эквивалентны:

- а) «Некоторые из тех, которые не сдали математическую логику, были отчислены» и «Некоторые из тех, которые были отчислены, не сдали математическую логику».
- б) «Все те, которые сдавали зачет, сдали зачет» и «Все те, которые сдали зачет, сдавали зачет».
- в) «Всё, что у нас есть, нам необходимо» и «Всё, что нам необходимо, у нас есть».

ТЕМА 10. СТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ. ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ. СИЛЛОГИЗМЫ АРИСТОТЕЛЯ.

Основные вопросы темы:

1. Способы доказательства сложных утверждений. Доказательства от противного. Формализация математических свойств и высказываний и их отрицаний.
2. Модусы. Использование кругов Эйлера. Значение силлогизмов Аристотеля в истории математической логики.

Рекомендации по изучению темы:

Основные понятия по вопросу 1 представлены в учебнике [1] (с.78-80), подробное изложение вопроса с примерами можно найти в [9] (с.164-196). Теоретические сведения и примеры по вопросу 2 представлены в [1] (с.159-169), [8] (с.30-32). Для отработки практических навыков по теме рекомендуются задачи 1.1-1.7 из [1], с.44-45, задачи 2.3.1-2.3.17, 2.7.1-2.7.14, 2.8.1-2.8.5, 2.8.26-2.8.29 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Какие логические схемы используются в доказательствах математических утверждений?

2. С какими законами логики связана возможность доказательства от противного?
3. Как используется формализация математических утверждений и их отрицаний в математическом доказательстве?
4. Являются ли доказательства в современной математике строго формальными? Неформальными? Почему?
5. Что такое силлогистика Аристотеля?
6. Каковы ограничения силлогистики Аристотеля?
7. В чем значение силлогистики Аристотеля?
8. Есть ли необходимость учить силлогизмы наизусть? Каким способом можно проверить правильность соответствующих схем рассуждений?

ТЕМА 11. ПОНЯТИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ИНТЕРПРЕТАЦИИ И МОДЕЛИ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ.

Основные вопросы темы:

Формальный язык и аксиоматическая теория. Модель аксиоматической теории. Примеры аксиоматических теорий. Исчисление высказываний.

Рекомендации по изучению темы:

Теоретические сведения и примеры по вопросу 1 представлены в учебниках [1] (с.47-49), [7] (с.9-13, 45-63), подробное обсуждение вопроса с исторической справкой можно найти в [9] (с.131-150). Для закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи 2.6.18-2.6.48 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Что такое аксиоматическая теория?
2. Для чего формальный язык наделяется семантической и дедуктивной системами?
3. Что такое модель аксиоматической теории?
4. Приведите примеры аксиоматических теорий
5. В чем отличие логики высказываний от исчисления высказываний?

ТЕМА 12. СВОЙСТВА АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ.

Основные вопросы темы:

Теория первого порядка. Свойства аксиоматических теорий: Непротиворечивость, категоричность, независимость аксиом, полнота. Теорема Гёделя о полноте.

Рекомендации по изучению темы:

Теоретические сведения и примеры по теме представлены в учебниках [1] (с.47-49), [9] (с.151-162), см. также [7] (с.106-112). Для закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи 2.10.1-2.10.7 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Что такое теория первого порядка?
2. Каковы правила вывода в теории первого порядка?

3. В каком случае аксиоматическая теория называется полной относительно данной интерпретации?
4. В каком случае аксиоматическая теория называется разрешимой?
5. Что подразумевает свойство непротиворечивости?
6. Сформулируйте теорему Гёделя о полноте

ТЕМА 13. МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Основные вопросы темы:

Преобразование формул логики высказываний для применения метода резолюций. Алгоритм метода резолюций. Установление правильности рассуждений. Примеры. Хорновские дизъюнкты.

Рекомендации по изучению темы:

Алгоритм рассматриваемого метода можно найти, например, в [1] на с.55-58. Отдельные вопросы темы освещаются также на с.39-40 учебника [1]. Для закрепления практических навыков рекомендуются задачи 2.5.1-2.5.21 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Что обосновывает метод резолюций? Как используется метод резолюций для обоснования правильности рассуждений?
2. К какому виду необходимо привести логическую формулу для применения метода резолюций? Какими способами можно это сделать?
3. Что такое дизъюнкт?
4. Дайте определение резольвенты. Как строится резольвента?
5. Что такое хорновский дизъюнкт? В чем его особенности?
6. В чем удобство метода резолюции?

ТЕМА 14. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ.

Основные вопросы темы:

Приведенная форма. Сколемизация и унификация формул. Подготовка множества фактов к резолютивному выводу.

Рекомендации по изучению темы:

Теоретические сведения по вопросам темы изложены в [1], с.73-83, в [4], с.24-27. Для закрепления практических навыков рекомендуются задачи 2.8.6-2.8.8 из [8], задачи из учебника [7] на с.93-96.

Контрольные вопросы:

1. Что такое предваренная нормальная форма предиката?
2. Как выглядит сколемовская нормальная форма предиката?
3. Как привести предикатную формулу к сколемовской нормальной форме?
4. Как выглядят предикатные формулы, подготовленные к резолютивному выводу?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Какая из приведенных ниже формул является предваренной нормальной формой предикатной формулы $(\forall x)(\forall y) A(x,y) \rightarrow (\exists x)(B(x) \rightarrow (\exists y) C(x,y))$?

- а) $(\exists x)[(\exists y)\neg A(x,y) \vee (B(x) \rightarrow (\exists y) C(x,y))]$
- б) $(\forall x)(\forall y)(\exists u)(\exists v)(\neg A(x,y) \rightarrow B(u) \rightarrow C(u,v))$
- в) $(\exists x)[(\exists y)\neg A(x,y) \vee \neg B(x) \vee (\exists y) C(x,y)]$
- г) $(\exists x)(\exists y)(\neg A(x,y) \vee \neg B(x) \vee C(x,y))$

2. Как выглядит сколемовская форма предикатной формулы $(\forall x)(\exists y)[(A(x,y) \wedge \neg B(x,y)) \vee C(x,y)]$?

- а) $(A(x, f(x)) \wedge \neg B(x, f(x))) \vee C(x, f(x))$
- б) $(A(x,y) \wedge \neg B(x,y)) \vee C(x,y)$
- в) $(A(f(y),y) \wedge \neg B(f(y),y)) \vee C(f(y),y)$
- г) $(A(x,a) \wedge \neg B(x,a)) \vee C(x,a)$

ТЕМА 15. МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ.

Основные вопросы темы:

Резолютивный вывод. Доказательство правильности умозаключений на естественном языке.

Рекомендации по изучению темы:

Теоретические сведения по вопросам темы изложены в учебнике [1], с.83-86. Для закрепления практических навыков рекомендуются задачи 2.8.9-2.8.25 из [8].

Контрольные вопросы:

- 1. Для чего осуществляется унификация предикатных формул перед построением резольвенты?
- 2. Как происходит унификация формул? Каковы условия унифицируемости?

Всегда ли метод резолюций в логике предикатов позволяет сделать вывод о невыполнимости предикатной формулы?

ТЕМА 16. ВЕРИФИКАЦИЯ. ПРОГРАММА КАК ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ПРЕДИКАТОВ.

Основные вопросы темы:

- 1. Тестирование и верификация. Необходимость верификации и ее связь с математической логикой.
- 2. Последствия ошибок в программах. Формальные требования к программам.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 изложен в учебнике [1] на с. 92-100, информацию по вопросу 2 можно найти в [6], см. также [5] с.4-32.

Контрольные вопросы:

1. Что такое верификация программы?
2. В чем отличия верификации от тестирования?
3. Почему верификация современных программных систем управления является важной проблемой?
4. Почему при верификации используются результаты математической логики?

Кейсы для самостоятельной работы:

Найдите в интернете истории катастроф в результате ошибок в программах. Постарайтесь выяснить, что привело к сбою программы, в чем заключалась роковая ошибка? Подумайте, почему она не была обнаружена в результате тестирования программы на стадии ее отладки.

ТЕМА 17. СПЕЦИФИКАЦИЯ ПРОГРАММ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.

Основные вопросы темы:

1. Программы обработки данных. Частичная и полная корректность.
2. Сильнейшее постусловие и слабейшее предусловие. Индуктивный метод доказательства частичной корректности.

Рекомендации по изучению темы:

Вопросы 1-2 частично освещены в учебнике [1] на с. 90-94, а также в книге [5] на с.26-28. Для закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи 2.11.1-2.11.19 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Как определяется спецификация требований к программам обработки данных?
2. Что такое частичная корректность программы? Как можно формально проверить частичную корректность заданной программы?
3. Что такое сильнейшее постусловие и слабейшее предусловия программы обработки данных и как они могут использоваться при верификации программ?
4. Как выглядит слабейшее предусловие для оператора присваивания? Для условного оператора?
5. В чем заключается индуктивный метод верификации?

ТЕМА 18. ПРИМЕРЫ ПРОВЕРКИ КОРРЕКТНОСТИ ПРОГРАММ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.

Основные вопросы темы:

1. Доказательство корректности ациклических программ.
2. Инвариант цикла и его использование в доказательстве корректности. Примеры.

Рекомендации по изучению темы:

С типичными примерами студенты знакомятся на лекции, а для закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи 2.11.20-2.11.33, 2.12.1-2.12.6 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Что такое дедуктивная верификация программ?
2. Каковы результаты применения верификации на практике?
3. Что такое инвариант?
4. Сколько контрольных точек со спецификациями промежуточных утверждений на блок-схеме программы требует метод Флойда?

5. Откуда программист может знать промежуточные утверждения в контрольных точках?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Как выглядит слабое предусловие для следующего фрагмента программы обработки данных с заданным постусловием?
S: $[x:=x-y; z:=y+x], \text{Post}=(z=x+1)$
- а) $wc(S, \text{Post})=(z=x)$
 - б) $wc(S, \text{Post})=(y=x)$
 - в) $wc(S, \text{Post})=(y=1)$
2. С каким предусловием следующая программа является частично корректной?
 $\{\text{Pre}\} [x:=x+y; y:=z+x] \{z=2x+y\}$
- а) $\text{Pre}=(x+y=0)$
 - б) $\text{Pre}=(x=0)$
 - в) $\text{Pre}=(x+y>0)$
3. Какой предикат является инвариантом цикла для программы
S: $[M:=b[N]; i:=N$
while $i>0$
begin $i:=i-1;$
if $b[i]>M$ then $M:=b[i]$
end]
с предусловием $\text{Pre}=(b - \text{массив из } N \text{ действительных чисел}).$
- а) $M=\max \{b[j]: i \leq j \leq N\}$
 - б) $M=\max \{b[j]: 1 \leq j \leq i-1\}$
 - в) $M=\max \{b[j]: i-1 \leq j \leq N\}$
 - г) $M=\max \{b[j]: 1 \leq j \leq i\}$

ТЕМА 19. МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕАГИРУЮЩИХ СИСТЕМ.

Основные вопросы темы:

- 1. Трансформационные и реагирующие программы. Параллельные процессы.
- 2. Адекватное описание поведения управляющих систем средствами математической логики.

Рекомендации по изучению темы:

Вопросы темы изложены в [5] на с.28-39. Для закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи на с.38, 58-62 из [5].

Контрольные вопросы:

- 1. Почему модель состояний и переходов удобна для представления реагирующих систем?
- 2. Что такое состояние?
- 3. Почему анализ параллельных программных систем сложен?
- 4. Почему для построения модели параллельных программ используются только атомарные переходы?

ТЕМА 20. ЛИНЕЙНАЯ ТЕМПОРАЛЬНАЯ ЛОГИКА.

Основные вопросы темы:

- 1. Темпоральные и модальные операторы.

2. Синтаксис и семантика линейной темпоральной логики. Выражение требований к программам формулами линейной темпоральной логики.

Рекомендации по изучению темы:

Вопросы темы частично изложены в учебнике [1] на с. 146-151, в учебнике [7] на с.203-208, а также в книге [5] на с.41-51, 62-68. Для закрепления практических навыков по теме рекомендуются задачи задачи 2.1-2.5 из [5], задачи 4.1.1-4.1.14 из [8].

Контрольные вопросы:

1. Что такое модальные операторы и темпоральные операторы?
2. Что такое темпоральная логика?
3. Что такое темпоральная логика линейного времени LTL?
4. Назовите основные операторы логики LTL.
5. Что определяют формулы LTL?

ТЕМА 21. ТЕМПОРАЛЬНАЯ ЛОГИКА ВЕТВЯЩЕГОСЯ ВРЕМЕНИ

Основные вопросы темы:

1. Линейное и ветвящееся время. Структура Крипке. Формальная семантика.
2. Проверяемые свойства. Алгоритм проверки модели.

Рекомендации по изучению темы:

Вопросы темы обсуждаются в [5] на с. 68-85. Для самостоятельной отработки практических навыков по теме рекомендуются источники [8] (задачи 4.2.1-4.2.15) и [5] (задачи 2.6-2.11,2.14).

Контрольные вопросы:

1. Что такое темпоральная логика “ветвящегося времени”?
2. Для описания каких явлений нужна логика CTL?
3. Почему CTL – одна из возможных логик ветвящегося времени?
4. Какие операторы логики CTL не относятся к LTL?
5. Как сравнить логику линейного времени LTL и логику ветвящегося времени CTL?
6. Что представляет из себя структура Крипке? Как она строится? Какие свойства программы можно выяснить, анализируя структуру Крипке?

ТЕМА 22. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЕДУКТИВНОЙ ВЕРИФИКАЦИИ ПРОГРАММ

Основные вопросы темы:

Защитное программирование. Корректность по построению. Генерация тестов. Современное состояние индуктивной верификации.

Рекомендации по изучению темы:

С темой 22 студенты знакомятся главным образом на лекции и повторяют с использованием предоставляемого им конспекта в виде презентации. Дополнительные сведения по теме можно найти в [5], с.13-24, 247-290.

Контрольные вопросы:

1. Как разрабатывать программы одновременно с доказательством их корректности?
2. Как использовать преобразование предикатов для генерации тестов?
3. Каково состояние верификации сегодня?
4. Каков формальный базис верификации программных и аппаратных систем?
5. Можно ли с помощью верификации добиться полной корректности системы?

6. Все ли проблемы применения метода Model checking решены?

Кейсы для самостоятельной работы:

Найдите в интернете примеры применения метода дедуктивной верификации для доказательства правильности программы. Постарайтесь выяснить, какие ошибки выявил метод? Какие результаты показало тестирование?

ТЕМА 23. АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИМЫЕ ФУНКЦИИ

Основные вопросы темы:

1. Интуитивное понятие алгоритма и неформальная вычислимость. Понятие алгоритмической системы.
2. Вычислимые функции. Примитивно рекурсивные функции. Частично рекурсивные функции. Общерекурсивные функции. Теория алгоритмов.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос 1 обсуждается в учебнике [7] на с. 134-135, в учебном пособии [9], с. 199-206. По вопросу 2 можно обратиться к учебнику [7] (с.144-153), а также к учебным пособиям [4] (с.83-87) и [2] (раздел 9). Для самостоятельного закрепления практических навыков рекомендуются задачи из [4] (с.89-91), [7] (задачи 6-14 на с.194-195), [10] (задания 1-15 на с.4-5, задачи 1-6 на с.18-21).

Контрольные вопросы:

1. Что такое «алгоритм»?
2. Перечислите и охарактеризуйте основные свойства алгоритма.
3. Какие существуют подходы к уточнению понятия алгоритма?
4. Почему возникла необходимость уточнить данное понятие?
5. Какая функция называется вычислимой?
6. Чем отличается описание алгоритма от механизма его реализации?
7. Существует ли примитивно-рекурсивная функция для вычисления неполного частного при делении с остатком натуральных чисел?
8. В чем заключается конструктивный подход, принятый в теории алгоритмов?
9. Как называются операции над функциями?
10. Что входит в базис?
11. Дать определение функции проекции, суперпозиции, примитивной рекурсии.
12. Дать определение примитивно-рекурсивной функции.
13. Как доказать примитивную рекурсию сложения? Вычитания?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Укажите верные утверждения:

- а) Интуитивно говоря, алгоритм — некоторое формальное предписание, действуя согласно которому, можно получить решение задачи
- б) Частные задачи, выделяемые по мере надобности из рассматриваемого класса, определяются с помощью параметров
- в) Алгоритмы без входных данных не существуют

2. Укажите верное утверждение:

- а) Параметры играют роль исходных данных для алгоритма
- б) Алгоритмы, которые не оканчиваются при каких-то входных данных, не рассматриваются
- в) Алгоритм Евклида на самом деле алгоритмом не является

3. Укажите верные утверждения:

- а) Функция проекции на самом деле обозначает бесконечное множество функций
- б) Прimitивная рекурсия и суперпозиция — это два механизма, которые позволяют создавать только всюду определенные, исходя из всюду определенных функций
- в) Базисные функции — это те и только те частичные функции, которые всюду определены

4. Укажите верное утверждение:

- а) Вычислимая функция не обязана быть «практически вычисляемой»
- б) Частичная функция не может быть всюду определена
- в) Вычислимая функция не может быть нигде определена

5. Укажите верные утверждения:

- а) Функция Аккермана всюду определена
- б) Если две одноместных функций всюду определены, то их суперпозиция дает всюду определенную функцию
- в) Функция Аккермана строится из базисных функций с помощью примитивной рекурсии и суперпозиции

6. Укажите верное утверждение:

- а) Между всеми подходами имеются большие различия; каждый из них имеет свои преимущества для соответствующего описания вычислимости верно
- б) Все различные формализации понятия алгоритма и вычислимости были проделаны во второй половине XX века
- в) Нельзя формализовать интуитивное понятие алгоритма, не имея дела с компьютерами

ТЕМА 24. АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ

Основные вопросы темы:

1. Машина Тьюринга. Тезис Чёрча-Тьюринга и алгоритмическая неразрешимость.
2. Некоторые алгоритмически неразрешимые проблемы.

Рекомендации по изучению темы:

Подробное изложение вопроса 1 можно найти, например, на с.91-95 в учебном пособии [4], в учебном пособии [9], с. 206-209, в электронном учебном пособии [2] (раздел 9). а также в учебнике [7] (с.135-143). Вопрос 2 обсуждается в [7] (с.169-176) и в учебном пособии [9], с. 210-212. Для закрепления практических навыков предлагаются источники [3] (Задание 7, с.18) и [7] (Задачи 1-5 на с.193-194), [10] (упражнения 1-5 на с.8-9, 1-9 на с.15).

Контрольные вопросы:

1. Дать определение функции вычислимой по Тьюрингу.
2. Как выполняются требования к алгоритмам на примере МТ?
3. Тезис Чёрча говорит о вычислимых функциях. Справедливо ли аналогичное утверждение об алгоритмах?
4. Существует ли какое-нибудь ограниченное множество программ, для которых проблема остановки разрешима?

Тесты для самостоятельной работы:

1. Укажите верные утверждения:

- а) тезис Чёрча не доказан Чёрчем
- б) тезисы Чёрча и Маркова логически эквивалентны
- в) результат о равносильности различных формализаций понятия алгоритма и вычислимости доказан Геделем и Клини

2. Чем является тезис Чёрча?

- а) верой
- б) аксиомой
- в) гипотезой
- г) теоремой